Příklad I–1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$xf(y) + f\big(xf(y)\big) - xf\big(f(y)\big) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x + y).$$

Příklad I–2

Uvažujme rozdělení pravidelného n-úhelníku na $n-2$ trojúhelníků pomocí $n-3$ jeho úhlopříček, které se neprotínají uvnitř tohoto n-úhelníku. *Dvojbarevnou triangulací* rozumíme takové rozdělení n-úhelníku, v níž je každý trojúhelník obarven černou nebo bílou barvou a každé dva trojúhelníky, které mají společnou stranu, jsou obarveny různými barvami. Přirozené číslo $n \geqslant 4$ nazveme *triangulární*, právě když tento pravidelný n-úhelník má dvojbarevnou triangulaci takovou, že pro každý jeho vrchol A je počet černých trojúhelníků s vrcholem A větší než počet bílých trojúhelníků se stejným vrcholem A.

Určete všechna triangulární čísla.

Příklad I–3

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$ a I značí střed kružnice jemu vepsané. Nechť E je takový bod strany AC, pro který platí $|AE| = |AB|$. Dále nechť G je takový bod přímky EI, pro který platí $|\measuredangle IBG| = |\measuredangle CBA|$, přičemž I je vnitřním bodem úsečky EG.

Dokažte, že přímka AI, kolmice k přímce AE sestrojená v bodě E a osa úhlu $\measuredangle BGI$ se protínají v jednom bodě.

Příklad I–4

Pro libovolná celá čísla $n \geqslant k \geqslant 0$ definujeme *bibinomický koeficient* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ předpisem

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$

Určete všechny dvojice (n, k) celých čísel, kde $n \geqslant k \geqslant 0$, takové, že odpovídající bibinomický koeficient je celé číslo.

Poznámka. Dvojný faktoriál $n!!$ *je definován jako součin všech sudých čísel po* n*, je-li* n *sudé, a jako součin všech lichých čísel po* n*, je-li* n *liché. Např.* $4!! = 2 \cdot 4 = 8$*,* $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ *a definujeme* $0!! = 1$.

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.

Příklad T–1

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{b+y}\,,$$

kde a, b, x a y jsou kladná reálná čísla splňující nerovnosti

$$\frac{1}{a+x}\geqslant\frac{1}{2},\quad\frac{1}{a+y}\geqslant\frac{1}{2},\quad\frac{1}{b+x}\geqslant\frac{1}{2}\quad\text{a}\quad\frac{1}{b+y}\geqslant 1\,.$$

Příklad T–2

Určete všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, které pro každé $x,y\in\mathbb{R}$ splňují podmínku

$$xf(xy)+xyf(x)\geqslant f(x^2)f(y)+x^2y.$$

Příklad T–3

Nechť K a L jsou daná přirozená čísla. Na pravoúhelníkové desce složené z $2K\times 2L$ jednotkových čtverců se pohybuje mravenec z levého dolního rohu do pravého horního rohu. V každém kroku se přesune vodorovně nebo svisle na sousední pole, přičemž na žádné pole nevstoupí více než jedenkrát. Na některá pole desky mravenec nemusí vstoupit. V určitých případech tvoří všechna nenavštívená pole jediný pravoúhelník, který nazveme MEMO-*pravoúhelník*.

Určete počet všech různých MEMO-pravoúhelníků.

Poznámka. Pravoúhelníky jsou různé, pokud nejsou tvořeny týmiž jednotkovými čtverci.

Příklad T–4

Ve Šťastném Městě žije 2014 obyvatel, které označíme $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$. Každý z nich je v každém okamžiku buď *šťastný*, nebo *nešťastný*. Nálada každého obyvatele A se mění (z nešťastného na šťastného a naopak), právě když se jiný šťastný obyvatel usměje na A. V pondělí ráno bylo ve Šťastném Městě N šťastných obyvatel.

Poté se v pondělí obyvatel A_1 usmál na A_2, dále se A_2 usmál na A_3 atd., až nakonec se A_{2013} usmál na A_{2014}. Nikdo z nich se neusmál na žádného jiného kromě uvedeného obyvatele. Přesně totéž se opakovalo v úterý, ve středu a ve čtvrtek. Ve čtvrtek večer tak bylo ve městě právě 2000 šťastných obyvatel.

Určete největší možnou hodnotu N.

Příklad T–5

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Osa AI vnitřního úhlu při vrcholu A protíná přímky DE a DF po řadě v bodech X a Y. Nechť Z značí patu výšky z vrcholu A.

Dokažte, že D je středem kružnice vepsané trojúhelníku XYZ.

Příklad T–6

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany BC v bodě D. Přímka AD protíná kružnici k v bodě $L \neq D$. Označme K střed kružnice vně připsané straně BC. Nechť M a N jsou po řadě středy úseček BC a KM.

Dokažte, že body B, C, N a L leží na téže kružnici.

Příklad T–7

Konečnou množinu A přirozených čísel nazveme *průměrovou*, právě když pro každou její neprázdnou podmnožinu je aritmetický průměr jejích prvků také přirozené číslo. Jinak řečeno, množina A je průměrová, právě když $\frac{1}{k}(a_1 + \ldots + a_k)$ je přirozené číslo pro každé $k \geqslant 1$ a $a_1, \ldots, a_k \in A$ jsou navzájem různá čísla.

Je dáno přirozené číslo n. Určete nejmenší možný součet prvků n-prvkové průměrové množiny.

Příklad T–8

Určete všechny uspořádané čtveřice (x, y, z, t) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.